

非自治广义 Birkhoff 系统的 半负定矩阵梯度系统表示*

王嘉航^{1,2}, 张毅¹

(1. 苏州科技大学土木工程学院, 江苏 苏州 215011;
2. 河海大学土木与交通学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 研究非自治广义 Birkhoff 系统的半负定矩阵梯度系统表示。给出了非自治广义 Birkhoff 系统成为半负定矩阵梯度系统的条件, 利用半负定矩阵梯度系统的性质来研究解的稳定性。举例说明结果的应用。

关键词: 非自治广义 Birkhoff 系统; 半负定矩阵梯度系统; 稳定性

中图分类号: O316 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2018) 03-0060-04

A semi-negative definite matrix gradient system representation for non-autonomous generalized Birkhoff system

WANG Jiahang^{1,2}, ZHANG Yi¹

(1. College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology,
Suzhou 215011, China;

2. College of Civil and Transportation Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A semi-negative definite matrix gradient system representation for a type non-autonomous generalized Birkhoff system is studied. The condition under which a non-autonomous generalized Birkhoff system can be considered as semi-negative definite matrix gradient system is obtained. The characteristic of semi-negative definite matrix gradient system is then used to study the stability of non-autonomous generalized Birkhoff system. Examples have been given to illustrate the applications of the results.

Key words: non-autonomous generalized Birkhoff system; semi-negative definite matrix gradient system; stability

梯度系统是一个数学系统, 梯度系统是微分方程和动力系统研究中的重要问题^[1-3]。如果一个力学系统能够化成为梯度系统, 就可利用梯度系统的特性来研究力学系统的性质, 特别是解的积分和系统的稳定性^[4]。梅凤翔等^[5-11]研究了 Lagrange 系统、Hamilton 系统和 Birkhoff 系统的梯度系统方法和斜梯度系统方法, 陈向炜等^[12]用具有负定非对称矩阵的梯度系统构造稳定的广义 Birkhoff 系统, 曹秋鹏等^[13-14]利用梯度系统方法研究了一类非自

治广义 Birkhoff 系统的稳定性和分岔和约束自治广义 Birkhoff 系统平衡稳定性, 李彦敏等^[15]研究了非自治 Birkhoff 系统的广义斜梯度表示, 陈向炜等^[16]研究了广义 Birkhoff 系统稳定性对双参数的依赖关系, 张毅等^[17-20]研究了一类非自治 Birkhoff 系统的梯度表示。本文进一步研究非自治广义 Birkhoff 系统成为具有半负定矩阵梯度系统的条件, 并利用半负定矩阵梯度系统的性质来研究非自治广义 Birkhoff 系统的稳定性。

* 收稿日期: 2017-08-04

基金项目: 国家自然科学基金 (10972151, 11272227); 苏州科技大学科研基金 (XKZ2017005)

作者简介: 王嘉航 (1977 年生), 女; 研究方向: 分析力学; E-mail: wjh77@mail.usts.edu.cn

通信作者: 张毅 (1964 年生), 男; 研究方向: 分析力学、力学中的数学方法; E-mail: zhy@mail.usts.edu.cn

1 半负定矩阵的梯度系统

半负定矩阵梯度系统的微分方程表示为^[2]

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}(X) \frac{\partial V(X,t)}{\partial x_j}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

其中 $a_{ij}(X)$ 为半负定矩阵, V 称为能量函数。

考虑半负定矩阵 $a_{ij}(X)$ 的性质, 可得

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \leq 0 \quad (2)$$

如果函数 V 为 Lyapunov 函数, 则可以利用 Lyapunov 定理判断解的稳定性。因此, 如果函数 V 在解的领域附近是正定的, 根据 Lyapunov 定理, 可知解是稳定的。如果函数 V 不能成为 Lyapunov 函数, 在一定条件下, 有可能利用 Rumyantsev 关于部分变量稳定性定理来研究梯度系统的部分变量稳定性。

2 非自治广义 Birkhoff 系统的梯度表示

广义 Birkhoff 系统的运动微分方程为

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} - \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} \right) \dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial a^\nu} - \frac{\partial R_\nu}{\partial t} = -\Lambda_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (3)$$

其中 $B = B(t, a)$ 为 Birkhoff 函数, $R_\mu = R_\mu(t, a)$ 为 Birkhoff 函数组, $\Lambda_\nu = \Lambda_\nu(t, a)$ 为附加项。如果 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_μ 都显含时间 t , 则称系统为非自治的。

假设系统非奇异, 则方程 (3) 可表示为

$$\dot{a}^\mu = \Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu \right), \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (4)$$

其中

$$\Omega^{\mu\nu} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (5)$$

$$\Omega^{\mu\nu} \Omega_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu \quad (6)$$

一般而言, 非自治广义 Birkhoff 系统不是一个梯度系统。如果能量函数 V 满足条件

$$\Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu \right) = a_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (7)$$

则方程 (4) 为

$$\dot{a}^\mu = a_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} \quad (8)$$

显然这是一个半负定矩阵的梯度系统。因此在满足

条件 (7) 时, 非自治广义 Birkhoff 系统为半负定矩阵的梯度系统。

3 举 例

例 1 二阶非自治广义 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数 Birkhoff 函数组为

$$B = \frac{1}{2}(a^1)^2 e^t + \frac{1}{2}(a^2)^2 e^t - a^1 a^2 e^t,$$

$$R_1 = a^2 e^t, R_2 = 0$$

附加项为 $\Lambda_1 = 2a^1 e^t - a^2 e^t, \Lambda_2 = 0$, 试将其化为半负定矩阵梯度系统, 并讨论零解的稳定性。

解: 由式 (5) - (6) 计算得

$$\Omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -e^t \\ e^t & 0 \end{pmatrix}$$

以及

$$\Omega^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{e^t} \\ -\frac{1}{e^t} & 0 \end{pmatrix}$$

于是广义 Birkhoff 方程为

$$\begin{aligned} \dot{a}^1 &= a^2 - a^1, \\ \dot{a}^2 &= -a^2 + a^1 \end{aligned}$$

可写成如下形式

$$\begin{pmatrix} \dot{a}^1 \\ \dot{a}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial a^1} \\ \frac{\partial V}{\partial a^2} \end{pmatrix}$$

其中矩阵是半负定的, 则能量函数 V 为

$$V = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2$$

V 在 $a^1 = a^2 = 0$ 的邻域内正定的, 因此零解 $a^1 = a^2 = 0$ 是稳定的。

例 2 二阶非自治广义 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数组为

$$B = \mu a^1 a^2 \sin t, R_1 = 0, R_2 = a^1 \sin t$$

附加项为

$$\Lambda_1 = a^1 \sin t + a^2 \sin t - \mu a^1 \sin t,$$

$$\Lambda_2 = a^1 \cos t + a^2 \sin t$$

其中 μ 是参数, 试将其化为半负定矩阵梯度系统, 并讨论零解的稳定性。

解: 广义 Birkhoff 方程为

$$\dot{a}^1 = -\mu a^1 + a^2,$$

$$\dot{a}^2 = -a^1 - a^2 + \mu a^1 + \mu a^2$$

也可写成如下形式

$$\begin{pmatrix} \dot{a}^1 \\ \dot{a}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial a^1} \\ \frac{\partial V}{\partial a^2} \end{pmatrix}$$

其中矩阵是半负定的, 则能量函数 V 为

$$V = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2 - \mu a^1 a^2$$

当 $-1 < \mu < 1$ 时, V 在 $a^1 = a^2 = 0$ 的邻域内是正定的, 因此零解 $a^1 = a^2 = 0$ 是稳定的。

4 结 语

在力学系统的稳定性研究中, 构造 Lyapunov 函数有时很困难的, 而运用梯度系统的性质研究稳定性不需要构造 Lyapunov 函数。本文利用半负定矩阵梯度系统的性质来研究非自治广义 Birkhoff 系统的稳定性问题, 将非自治广义 Birkhoff 系统在一定条件化为具有半负定矩阵梯度系统, 算例表明了结果的有效性。

参考文献:

- [1] HIRCH M W, SMALE S. Differential equations, dynamical systems and linear algebra [M]. New York: Academic Press, 1974.
- [2] MC LACHLAN R I, QUISPTEL G R W, ROBIDOUX N. Geometric integration using discrete gradients [J]. Phil Tran R Soc Lond A, 1999, 357: 1021 - 1045.
- [3] HIRSCH M W, SMALE S, DEVANEY R L. Differential equations, dynamical systems, and introduction to chaos [M]. Singapore: Elsevier, 2008.
- [4] 梅凤翔, 吴惠彬. 约束力学系统的梯度表示 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [5] 梅凤翔. 关于梯度系统 [J]. 力学与实践, 2012, 34(1): 89 - 90.
MEI F X. About gradient system [J]. Mechanics in Engineering, 2012, 34(1): 89 - 90.
- [6] 梅凤翔, 吴惠彬. 广义 Birkhoff 系统的梯度表示 [J]. 动力学与控制学报, 2012, 10(4): 289 - 292.
MEI F X, WU H B. A gradient representation for generalized Birkhoff system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2012, 10(4): 289 - 292.
- [7] 梅凤翔, 吴惠彬. Birkhoff 系统的广义斜梯度表示 [J]. 动力学与控制学报, 2015, 13(5): 329 - 331.
MEI F X, WU H B. Generalized skew-gradient representation for Birkhoff system [J]. Journal of Dynamics and

Control, 2015, 13(5): 329 - 331.

- [8] 梅凤翔, 吴惠彬. 广义 Birkhoff 系统与一类组合斜梯度 [J]. 物理学报, 2015, 64(18): 366 - 370.
MEI F X, WU H B. Generalized Birkhoff system and a kind of combined gradient system [J]. Acta Phys Sin, 2015, 64(18): 366 - 370.
- [9] MEI F X, WU H B. Bifurcation for the generalized Birkhoffian system [J]. Chin Phys B, 2015, 24(5): 054501.
- [10] MEI F X, WU H B. Skew-gradient representation of generalized Birkhoffian system [J]. Chin Phys B, 2015, 24(10): 104502.
- [11] MEI F X, CUI J C. Skew-gradient representation of constrained mechanical system [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2015, 36(7): 873 - 882.
- [12] 陈向炜, 张晔, 梅凤翔. 用具有负定非对称矩阵的梯度系统构造稳定的广义 Birkhoff 系统 [J]. 力学学报, 2017, 49(1): 149 - 153.
CHEN X W, ZHANG Y, MEI F X. Stable generalized Birkhoff systems constructed by using a gradient system with non-symmetrical negative-definite matrix [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2017, 49(1): 149 - 153.
- [13] 曹秋鹏, 陈向炜. 一类非自治广义 Birkhoff 系统的稳定性和分岔 [J]. 北京大学学报, 2016, 52(4): 653 - 657.
CAO Q P, CHEN X W. Stability and bifurcation for a type of non-autonomous generalized Birkhoffian system [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, 2016, 52(4): 653 - 657.
- [14] 曹秋鹏, 张毅, 陈向炜. 约束自治广义 Birkhoff 系统平衡稳定性的梯度系统方法 [J]. 云南大学学报, 2015, 37(2): 228 - 232.
CAO Q P, ZHANG Y, CHEN X W. Stability of equilibrium for autonomous generalized Birkhoffian system with constraints by gradient system [J]. Journal of Yunnan University, 2015, 37(2): 228 - 232.
- [15] 李彦敏, 梅凤翔. 非自治 Birkhoff 系统的广义斜梯度表示 [J]. 云南大学学报, 2015, 37(6): 832 - 836.
LI Y M, MEI F X. A generalized skew-gradient representation for non autonomous Birkhoffian system [J]. Journal of Yunnan University, 2015, 37(6): 832 - 836.

- [16] 陈向炜, 曹秋鹏, 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统稳定性对双参数的依赖关系[J]. 力学季刊, 2017, 38(1): 108–112.
CHEN X W, CAO Q P, MEI F X. Ascendance of stability of generalized Birkhoff system on two parameters [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2017, 38(1): 108–112.
- [17] 张毅. 一类非自治 Birkhoff 系统的梯度表示[J]. 苏州科技学院学报, 2015, 32(4): 1–3.
ZHANG Y. A gradient representation for a type of non-autonomous Birkhoffian system [J]. Journal of Suzhou University of Science and Technology, 2015, 32(4): 1–3.
- [18] 王雪萍, 张毅. Birkhoff 系统的 Noether-Mei 对称性与守恒量[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(4): 53–55.
WANG X P, ZHANG Y. Noether-Mei symmetry and conserved quantity of Birkhoffian system [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(4): 53–55.
- [19] LIU C, LIU S X, MEI F X. Stability analysis of a simple rheonomic nonholonomic constrained system [J]. Chin Phys B, 2016, 25(12): 124501.
- [20] 张毅. 相空间中类分数阶变分问题的 Noether 对称性与守恒量[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2013, 52(4): 45–50.
ZHANG Y. Noether symmetry and conserved quantity for a fractional action-like variational problem in phase space [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2013, 52(4): 45–50.
- [21] 梅凤翔. 分析力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2013.
- [22] 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统动力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2013.